Bab 2

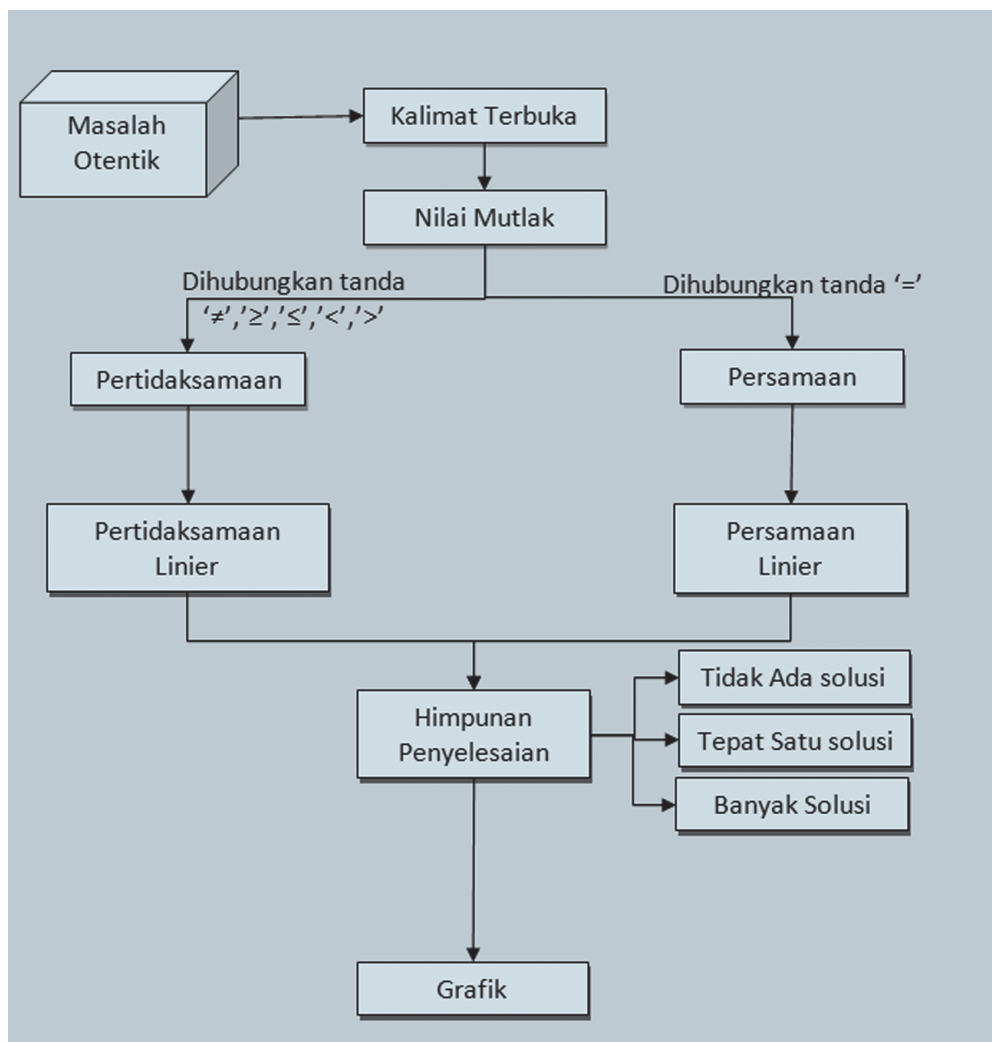
Persamaan dan Pertidaksamaan Linear

A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran ini siswa mampu: 1. menghayati pola hidup disiplin, kritis, bertanggungjawab, konsisten dan jujur serta menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari; 2. memahami dan menganalisis konsep nilai mutlak dalam persamaan dan pertidaksamaan serta menerapkannya dalam penyelesaian masalah nyata; 3. menerapkan konsep nilai mutlak dalam persamaan dan pertidaksamaan linear dalam memecahkan masalah nyata.	Melalui pembelajaran materi persamaan dan pertidaksamaan linear, siswa memperoleh pengalaman belajar: • mampu berpikir kreatif; • mampu menghadapi permasalahan pada kasus linear dalam kehidupan sehari-hari; • mampu berpikir kritis dalam mengamati permasalahan; • mengajak untuk melakukan penelitian dasar dalam membangun konsep; • mengajak kerjasama tim dalam menemukan solusi permasalahan; • mengajak siswa untuk menerapkan matematika dalam kehidupan sehari-hari; • siswa mampu memodelkan permasalahan.

Istilah Penting

- *Orde linear*
- *Lebih dari*
- *Kurang dari*
- *Nilai mutlak*

B. PETA KONSEP

C. MATERI PEMBELAJARAN

Pada saat ini, kita akan mempelajari beberapa ilustrasi dan kasus untuk memahami dan menemukan konsep nilai mutlak (*absolut*).

1. Menemukan Konsep Nilai Mutlak

Ilustrasi:

Gambar 2.1 Anak Pramuka

Kegiatan pramuka adalah salah satu kegiatan ekstrakurikuler yang diadakan di sebuah sekolah. Sebuah grup pramuka sedang belajar baris berbaris di lapangan sekolah pada hari Sabtu. Sebuah perintah dari pimpinan pasukan: "Maju 4 langkah, jalan!", hal ini berarti jarak pergerakan barisan adalah 4 langkah ke depan. Jika perintah pimpinan pasukan: "Mundur 3 langkah, jalan!", hal ini berarti bahwa pasukan akan bergerak melawan arah sejauh 3 langkah. Demikian seterusnya.

Besar pergerakan langkah pasukan tersebut merupakan nilai mutlak, tidak ditentukan arah. "Maju 4 langkah", berarti mutlak 4 langkah dari posisi diam dan "mundur 3 langkah, berarti mutlak 3 langkah dari posisi diam. Dalam hal ini, yang dilihat adalah nilainya, bukan arahnya. Lebih jelasnya, mari bersama-sama mempelajari kasus-kasus di bawah ini.

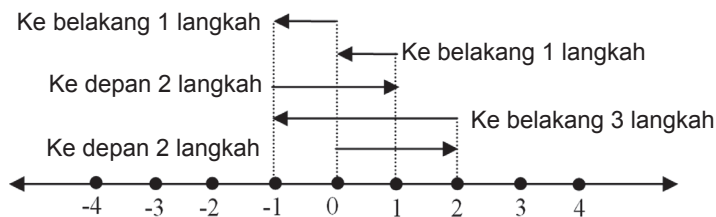
Masalah-2.1

Seorang anak bermain lompat-lompatan di lapangan. Dari posisi diam, si anak melompat ke depan 2 langkah, kemudian 3 langkah ke belakang, dilanjutkan 2 langkah ke depan, kemudian 1 langkah ke belakang, dan akhirnya 1 langkah ke belakang.

Permasalahan:

a. Dapatkah kamu membuat sketsa lompatan anak tersebut?
b. Tentukanlah berapa langkah posisi akhir anak tersebut dari posisi semula!
c. Tentukanlah berapa langkah yang dijalani anak tersebut!

Alternatif Penyelesaian

Kita definisikan lompatan ke depan adalah searah dengan sumbu x positif, dengan demikian lompatan ke belakang adalah searah dengan sumbu x negatif.
Perhatikan sketsa berikut:

Gambar 2.2 Sketsa lompatan

Dari gambar di atas, kita misalkan bahwa $x = 0$ adalah posisi diam si anak. Anak panah yang pertama di atas garis bilangan menunjukkan, langkah pertama si anak sejauh 2 langkah ke depan (mengarah ke sumbu x positif), anak panah kedua menunjukkan 3 langkah si anak ke belakang (mengarah ke sumbu x negatif) dari posisi akhir langkah pertama, demikianlah seterusnya sampai akhirnya si anak berhenti pada langkah ke 5.

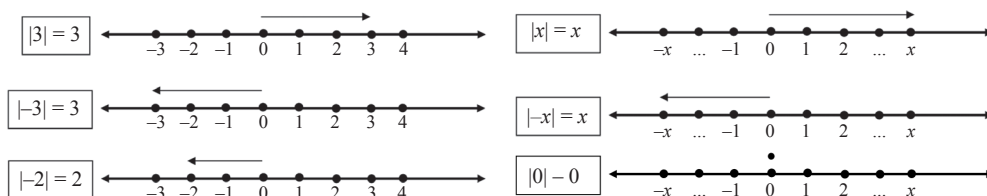
Jadi, kita dapat melihat pergerakan akhir si anak dari posisi awal adalah 1 langkah saja ke belakang ($x = -1$). Banyak langkah yang dijalani si anak merupakan konsep nilai mutlak, karena kita hanya menghitung banyak langkah, bukan arahnya. Banyak langkah selalu dinyatakan dengan bilangan bulat positif walaupun arahnya ke arah sumbu x negatif. Banyak langkah dapat dinyatakan dengan nilai mutlak dari sebuah bilangan bulat. Misalnya mundur 3 langkah dinyatakan dengan harga mutlak negatif 3 ($|-3|$). Sehingga banyak langkah anak tersebut adalah $|2| + |-3| + |2| + |-1| + |-1| = 9$ (9 langkah).

Perhatikan Tabel 2.1 berikut.

Tabel 2.1 Nilai Mutlak

Nilai Non Negatif	Nilai Mutlak	Nilai Negatif	Nilai Mutlak
0	0	–2	2
2	2	–3	3
3	3	–4	4
5	5	–5	5

Dari ilustrasi dan tabel di atas, dapatkah kamu menarik sebuah kesimpulan tentang pengertian nilai mutlak tersebut? Jika x adalah variabel pengganti semua bilangan real, dapatkah kamu menentukan nilai mutlak x tersebut?
Perhatikan bahwa x elemen himpunan bilangan real, kita tuliskan dengan $x \in R$.

Dari contoh pada tabel tersebut, kita melihat bahwa nilai mutlak akan bernilai positif atau nol. *Nilai mutlak adalah jarak antara bilangan itu dengan nol pada garis bilangan real*. Perhatikan garis bilangan berikut. Kita lakukan beberapa percobaan perpindahan posisi sebagai berikut.

Gambar 2.3 Selang Nilai Mutlak

Berdasarkan Gambar 2.3 di atas, dapat diperoleh definisi nilai mutlak berikut.

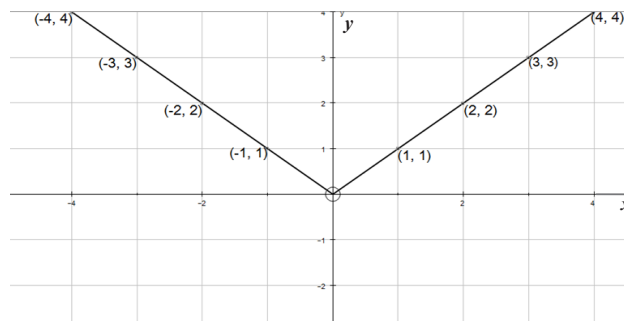
Definisi 2.1

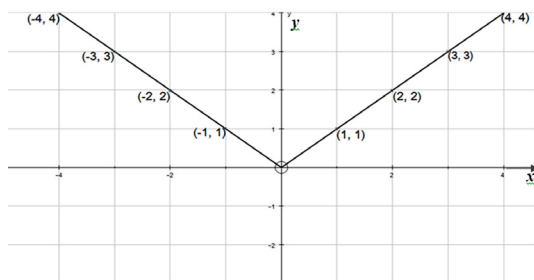
Misalkan x bilangan real, didefinisikan $|x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}$

Berikutnya, kita akan mencoba menggambar grafik $f(x) = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}$. Perhatikan beberapa titik yang mewakili grafik fungsi di atas.

Tabel 2.2 Pasangan Titik pada Fungsi $f(x) = |x|$

x	–4	–2	–1	0	1	2	4
$y=f(x)$	4	2	1	0	1	2	4
(x,y)	(–4,4)	(–2,2)	(–1,1)	(0,0)	(1,1)	(2,2)	(4,4)

Titik-titik yang kita peroleh pada tabel, disajikan dalam koordinat kartesius

Gambar 2.4: Grafik $y = f(x)=|x|$

sebagai berikut.

Gambar 2.4: Grafik *y* = *f*(*x*)=|*x*|

Berdasarkan definisi dan gambar grafik di atas dapat kita simpulkan bahwa harga $|x|$ pada dasarnya menyatakan besar simpangan dari titik $x = 0$.

Contoh 2.1

Gambarkan grafik $f(x) = |x-2|$ yang menyatakan besar simpangan pada titik $x = 2$. Sekarang, mari kita buat grafik $f(x) = |x-2|$, dengan langkah-langkah berikut.

Langkah 1.

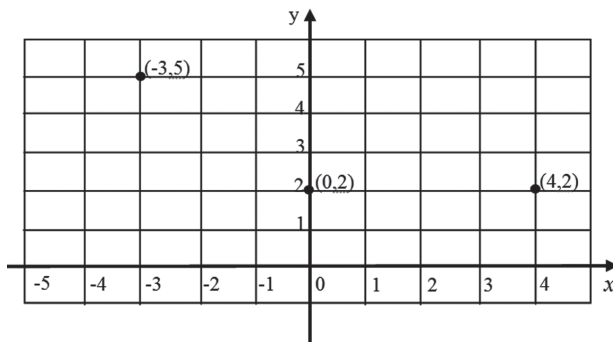
Buatlah tabel untuk menunjukkan pasangan titik-titik yang mewakili grafik tersebut.

Tabel 2.3 Pasangan Titik pada Fungsi $f(x) = |x-2|$

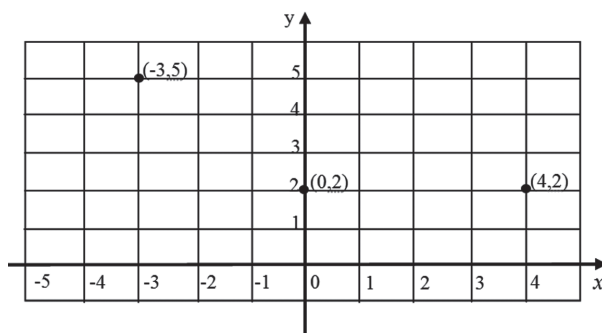
x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	5	...	...	2	...	...	...	2
(x,y)	(–3,5)	...	...	(0,2)	...	...	...	(4,2)

Lengkapilah tabel di atas!

Langkah 2.

Letakkanlah titik-titik yang kamu peroleh pada Tabel 2.3 pada koordinat kartesius.

Gambar 2.5 Titik Grafik *f*(*x*) = |*x*–2|

Langkah 3.

Hubungkanlah titik-titik yang sudah kamu letakkan di koordinat tersebut sesuai dengan urutan nilai x.

Gambar 2.6 Titik Grafik $f(x) = |x–2|$

Latihan 2.1

Perhatikan grafik $f(x) = |x-2|$

Lihatlah penyimpangan grafik terhadap sumbu x. Dapatkah kamu beri kesimpulan?

Bagaimana dengan penyimpangan pada grafik $f(x) = |x-p|$ terhadap sumbu x, untuk p bilangan real.

Selanjutnya, mari kita amati hubungan antara $|x|$ dengan $\sqrt{x^2}$ pada tabel berikut.

Tabel 2.4 Hubungan |x| dan $\sqrt{x^2}$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$\|x\|$	3	2	1	0	1	2	3
$\sqrt{x^2}$	3	2	1	0	1	2	3

Dapatkah kamu mengambil kesimpulan hubungan antara $|x|$ dengan $\sqrt{x^2}$ berdasarkan tabel di atas?

Latihan 2.2

Dari definisi nilai mutlak yang kita berikan, dapatkah anda berikan pendefinisian berikut.

$$|ax+b| = \begin{cases} \ldots & \text{jika} \quad \ldots \geq \ldots \\ \ldots & \text{jika} \quad \ldots < \ldots \end{cases}$$

Cobalah mendiskusikannya dengan temanmu!

2. Persamaan Linier

Masalah-2.2

Andi dalam tiga hari berturut-turut membelanjakan uangnya untuk membeli keperluan sekolah. Pada hari Minggu dia menghabiskan $\frac{1}{2}$ dari uang yang dimilikinya. Pada hari Senin, dia membelanjakan uangnya Rp 4.000,- lebih sedikit dari uang yang dia belanjakan hari Minggu. Sementara uang yang dibelanjakan pada hari Selasa hanya $\frac{1}{3}$ dari belanjaan hari Senin. Sekarang dia masih memiliki uang sisa belanjaan sebanyak Rp 1.000,-

Dapatkah kamu membuat model dari kasus permasalahan tersebut? Buatlah model tersebut, apakah kamu dapat menentukan uang Andi sebelum dibelanjakan?

Diketahui:

Belanja hari Minggu $= \frac{1}{2} \times$ jumlah uangnya.

Belanja hari Senin = Rp 4.000 lebih sedikit dari belanja hari Minggu.

Belanja hari Selasa $= \frac{1}{3} \times$ belanja hari Senin.

Ditanya:

- Buatlah model matematika dari permasalahan di atas.
- Tentukan berapa uang Andi sebelum dibelanjakan.

Alternatif Penyelesaian

Marilah kita bersama-sama menyelesaikan permasalahan ini.
Misal banyak uang Andi = x
Dari yang diketahui diperoleh

Belanja hari Minggu = $\frac{1}{2}x$

Belanja hari Senin = $\frac{1}{2}x - 4000$

Belanja hari Selasa = $\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} - 4.000\right)$

Kita buat sebuah persamaan dari kasus ini, yaitu:
Uang Andi = jumlah uang yang dibelanjakan + sisa uang
sehingga penyelesaian permasalahan ini, adalah:

$$x = \left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x}{2} - 4.000\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} - 4.000\right) + 1.000$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{x}{2} - 4.000 + \frac{x}{6} - \frac{4.000}{3} + 1.000 \quad \text{(kalikan kedua ruas dengan 6),}$$

$$6x = 3x + 3x - 24.000 + x - 8.000 + 6.000$$
$$= 7x - 26.000$$
$$x = 26.000$$

Dengan demikian uang Andi mula-mula adalah Rp 26.000,-

Masalah-2.3

Di sebuah desa, terdapat sepasang manula yang tinggal di rumah tua. Pada saat sensus penduduk awal tahun 2013, kakek dan nenek tersebut belum memiliki KTP. Untuk pembuatan KTP, kakek dan nenek diminta data tanggal lahir mereka, tetapi mereka tidak pernah mengetahui tanggal lahirnya. Mereka hanya mengingat bahwa saat menikah, selisih umur mereka 3 tahun. Saat itu nenek berusia 20 tahun, yaitu 11 tahun setelah proklamasi.
Dapatkah kamu membuat persamaan linear dari persoalan di atas? Dapatkah kita ketahui tahun lahir mereka?

Alternatif Penyelesaian

Diketahui:
Umur kakek – umur nenek = 3

Misalkan: Umur kakek = K Umur nenek = N
Tahun lahir kakek = TK Tahun lahir nenek = TN
$K - N = 3$.

Nenek berusia 20 tahun, yaitu 11 tahun sesudah proklamasi 1945. Jika sekarang awal tahun 2013 maka usia nenek adalah:
$N = (20 - 11) + (2013 - 1945)$ atau $N = 77$ tahun sehingga dengan $K - N = 3$ membuat $K = 80$ tahun.
Selanjutnya kita mendapatkan konsep mencari dugaan tahun lahir mereka dengan:

Tahun lahir + Usia = Tahun sekarang

sehingga dugaan tahun lahir mereka adalah:
$TN + 77 = 2013$ atau $TN = 1936$
$TK + 80 = 2013$ atau $TK = 1933$
Dengan demikian, kemungkinan tahun lahir nenek dan kakek adalah 1936 dan 1933.

Masalah-2.4

Umur ayah 4 tahun yang lalu adalah 2/3 kali umur ayah pada *c* tahun yang akan datang, (*c* adalah bilangan bulat positif). Sekarang, umur ayah adalah 27 tahun lebihnya dari 1/5 umurnya pada 7 tahun yang lalu.
Apakah kamu dapat menentukan umur ayah saat ini? Tentukanlah nilai *c* pada kasus tersebut!

Alternatif Penyelesaian

1. Misalkan umur ayah sekarang adalah x tahun.
2. Berdasarkan informasi masalah di atas, dapat dituliskan

   Umur ayah 4 tahun yang lalu 2/3 kali umur ayah pada c tahun yang akan datang,

   atau $x - 4 = \frac{2}{3}(x + c)$

   Umur ayah sekarang 27 tahun lebihnya dari 1/5 kali umurnya pada 7 tahun yang lalu.

   Artinya: $x = \frac{1}{5}(x - 7) + 27$
3. Model yang telah diperoleh, kita selesaikan sebagai berikut:

   $x - 4 = \frac{2}{3}(x + c) \quad \Leftrightarrow \quad x = 2c + 12$ (notasi $\Leftrightarrow$ dibaca jika dan hanya jika)

   $x = \frac{1}{5}(x + 7) + 27 \quad \Leftrightarrow \quad 4x - 128 = 0$

   $\Leftrightarrow \quad x = 32$

Kita substitusi $x = 32$ ke $x = 2c + 12$
Diperoleh $32 = 2c + 12$ atau $c = 10$
Jadi, umur ayah saat ini adalah 32 tahun.

Diskusi

Coba anda teliti kasus berikut! Dapatkah kamu menjawab dan memberi komentar, apakah kasus berikut logis?
Umur Ayah 5 tahun yang lalu adalah 2/3 kali umurnya pada c tahun yang akan datang. Sekarang, umur ayah adalah 6 tahun lebihnya dari 1/2 kali umurnya 7 tahun yang lalu.

Ketiga permasalahan di atas adalah sebuah pemahaman konsep dari bentuk persamaan linear satu variabel dan dua variabel. Secara induktif, bentuk umum dari persamaan linear satu variabel dan dua variabel, sebagai berikut.

Definisi 2.2

Persamaan linear satu variabel adalah persamaan yang didefinisikan $ax + b = 0$ dengan $a, b \in R$ dan $a \neq 0$, dimana
x : variabel
a : koefisien dari x
b : konstanta

Definisi 2.3

Persamaan linear dua variabel adalah persamaan yang didefinisikan $ax + by + c = 0$ dengan $a, b \in R$, a dan b tidak keduanya nol, dimana
x,y: variabel
a : koefisien dari x
b : koefisien dari y
c : konstanta persamaan

Contoh 2.2

1. Diberikan persamaan linear $x - 4y = 12$, untuk setiap $x, y \in R$. Gambarkanlah grafiknya!

Penyelesaian

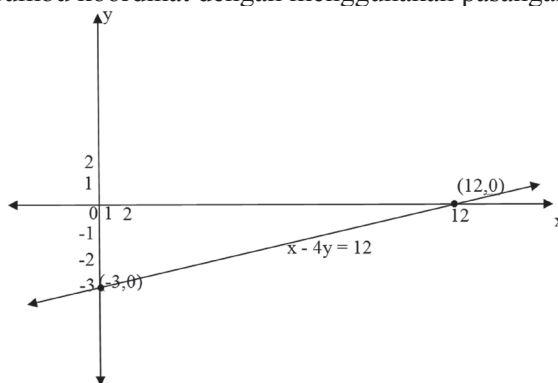
Pertama-tama kita tentukan nilai x dan y yang memenuhi persamaan $x - 4y = 12$ dan kita buat pada tabel berikut.

Tabel 2.5 Pasangan titik (x,y) untuk grafik $x - 4y = 12$

x	0	12	13	16	...	...	...
y	–3	0	$\frac{1}{4}$	1	...	...	...
(x,y)	(0,–3)	(12,0)	$(13,\frac{1}{4})$	(16,1)	...	...	...

Dari data Tabel 2.5 dapat dinyatakan bahwa pasangan (x,y) yang memenuhi persamaan $x - 4y = 12$ adalah tak hingga banyaknya, yaitu

$$HP = \{(0,-3),(12,0),(13,\tfrac{1}{4}),(16,1),\ldots\}.$$

Dari data pasangan titik sebagai anggota himpunan penyelesaian persamaan, khususnya diketahui bahwa grafik $x - 4y = 12$ ini memotong sumbu x pada titik (12, 0) serta memotong sumbu y pada titik (0, –3), dapat kita gambarkan grafik $x - 4y = 12$ pada sumbu koordinat dengan menggunakan pasangan (x, y) tersebut.

Gambar 2.7 Grafik $x - 4y = 12$

Contoh 2.3

Diberikan persamaan linear $y = 3x - 4$, untuk setiap $x \in R$. Gambarlah grafik persamaan linear tersebut!

Penyelesaian

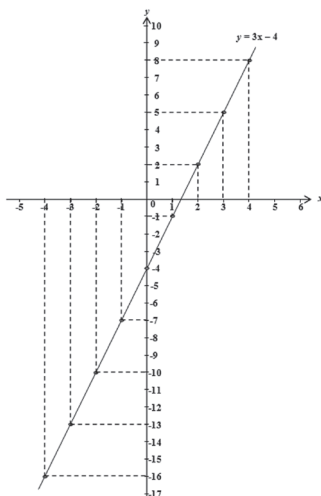
Pertama-tama kita tentukan nilai x dan y yang memenuhi persamaan $y = 3x – 4$ dan kita buat pada tabel berikut.

Tabel 2.6 Pasangan titik (*x*,*y*) untuk grafik *y* = 3*x* – 4

x	–4	–3	–2	–1	0	$\frac{4}{3}$	...
y	–16	–13	–10	–7	–4	0	...
(x,y)	(–4, 16)	(–3,–13)	(–2, –10)	(–1, –7)	(0, –4	$\left(\frac{4}{3},0\right)$	...

Dari data Tabel 2.6 dapat dinyatakan bahwa pasangan (x, y) yang memenuhi persamaan $y = 3x – 4$ adalah tak hingga banyaknya, yaitu

$HP = \{(–4,–16),(–3,–13),(–2,–10),(–1,-7),(0,–4),(\frac{4}{3},0) \ldots.\}$.

Dari data pasangan titik sebagai anggota himpunan penyelesaian, dapat dikatakan bahwa grafik $y = 3x – 4$ memotong sumbu x pada titik $(\frac{4}{3},0)$ dan memotong sumbu y pada titik $(0, –4)$. Selanjutnya kita gambarkan grafik $y = 3x – 4$ pada koordinat kartesius dengan menggunakan pasangan nilai (x, y) tersebut.

Gambar 2.8 Grafik *y* = 3*x* – 4

Definisi 2.4

Misalkan *a*, *b*, dan *c* bilangan real dan *a*, *b* keduanya tidak nol.

Himpunan penyelesaian persamaan linear $ax + by = c$ adalah himpunan semua pasangan (x, y) yang memenuhi persamaan linear tersebut.

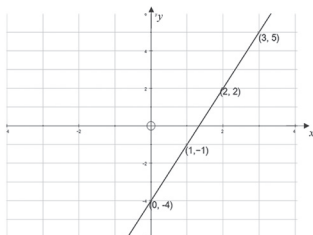
Diskusi

Berdasarkan Definisi-2.3, berdiskusilah dengan temanmu satu kelompok untuk menjawab beberapa pertanyaan berikut.

1. Dapatkah sebuah persamaan linear dua variabel memiliki anggota himpunan penyelesaian adalah tepat satu atau penyelesaian tunggal? Beri contoh persamaanya!
2. Dapatkah sebuah persamaan linear dua variabel tidak memiliki anggota himpunan penyelesaian? Beri contoh persamaannya!

Uji Kompetensi 2.1

1. Salah satu penyakit sosial remaja sekarang ini adalah merokok. Ahli kesehatan merilis informasi bahwa, akibat menghisap satu batang rokok akan mengurangi waktu hidup seseorang selama 5,5 menit. Seorang remaja mulai merokok 1 (satu) batang rokok perhari sejak umur 15 tahun. Berapa umur remaja tersebut yang berkurang sampai dia berumur 40 tahun?

2. Perhatikan grafik di bawah ini!

Dari pasangan titik-titik yang diberikan, tentukanlah persamaan linear yang memenuhi pasangan titik-titik tersebut.

3. Tentukanlah himpunan penyelesaian untuk setiap persamaan linear berikut ini!

   a. $5x - 3y = 7$

   b. $\frac{2}{3}y - 4x - 1 = 0$

   c. $y = \frac{1}{3} - 5x$

4. Untuk dapat diterima sebagai suster di RS.SEHAT, seorang calon suster akan menjalani tes sebanyak 4 kali, yaitu tes tertulis, psikotes, tes ketrampilan, dan wawancara dengan perbandingan hasil tes berturut-turut

adalah 4 : 3 : 2 : 1. Total nilai tes tidak boleh kurang dari 793. Windy adalah seorang calon suster yang telah mengikuti tes dengan hasil sebagai berikut:
Tes Tertulis= 75, Psikotes =78, dan Tes Wawancara=85. Tentukan nilai terendah Tes Keterampilannya agar ia dapat diterima di rumah sakit tersebut.

5. Berat astronot dan pesawatnya ketika mendarat di bulan tidak boleh melebihi 200 kg. Berat pesawat di bumi 900 kg dan berat benda di bulan 1/6 dari berat benda di bumi. Tentukan berat maksimum astronot di bumi!

6. Seorang penderita diabetes sedang mengontrol berat badannya. Ia menggunakan indeks berat badannya dengan rumus $I = W/h^2$, dengan W adalah berat badan (kg), dan h adalah tinggi badan (meter). Nilai I yang dimiliki setiap orang memiliki arti sebagai berikut.
   - $25 < I$ berarti berat badan normal
   - $25 < I < 30$ berarti kelebihan berat badan
   - $30 < I < 35$ berarti obesitas ringan
   - $35 < I < 40$ berarti obesitas sedang
   - $40 < I$ berarti obesitas kronis

   a. Jika tinggi badan orang tersebut 175 cm, berapa berat badan maksimal supaya tergolong berat badan normal?
   b. Jika orang tersebut sudah memiliki berat badan 80 kg dan yang akan dikontrol adalah tinggi badan dengan melakukan suatu terapi tertentu, tentukan batas tinggi badan agar digolongkan dalam katagori kelebihan berat badan.

7. Gambarkanlah grafik $g(x) = |2x–1|$ untuk $1 < x < 10$!

Projek

Perhatikan bahwa persamaan linear dua variabel dapat dibuat grafiknya asal diketahui dua titik yang dilaluinya. Padahal, persamaan linear dua variabel memiliki dua koefisien dan satu konstanta. Selidiki apa implikasi dari kenyataan ini. Misal, selidiki apakah hanya ada satu persamaan linear dua variabel yang melalui dua titik yang sama. Apakah ini berarti ada beberapa persamaan linear dua variabel berbeda yang melalui dua titik yang sama. Ataukah walaupun banyak, semua persamaan linear dua variabel melalui dua titik yang sama sebenarnya adalah sama. Buat laporan hasil kegiatanmu dan paparkan di depan kelas.

3. Aplikasi Nilai Mutlak pada Persamaan Linier

Kamu telah menerima pemahaman lewat pengamatan terhadap beberapa kasus pada nilai mutlak dan persamaan linear satu dan dua variabel. Selanjutnya kamu akan menyelesaikan penerapan konsep nilai mutlak tersebut ke persamaan linier. Kamu diharapkan mampu memahami aplikasi kedua konsep tersebut.

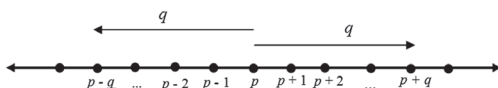
Masalah-2.5

Sungai Bengawan Solo sering meluap pada musim hujan dan kering dimusim kemarau. Jika debit air sungai tersebut adalah p liter/detik pada cuaca normal. Perubahan debit pada cuaca tidak normal adalah sebesar q liter/detik.

Tunjukkanlah sketsa penurunan minimum dan peningkatan maksimum debit air sungai tersebut!

Gambar 2.9 Sungai

Alternatif Penyelesaian

Telah kamu ketahui bahwa penyimpangan dari suatu nilai tertentu dapat dinyatakan dengan harga mutlak.

Misalkan debit air sungai = x

Simpangan x terhadap nilai pada cuaca normal = $|x - p|$. Karena perubahan debit air tersebut bernilai q maka $|x - p| = q$. Sehingga diperoleh $x = p + q$ atau $x = p - q$.

Dari sketsa di atas, tampak jelas bahwa penurunan minimum debit air adalah $(p - q)$ liter/detik dan peningkatan maksimum debit air adalah $(p + q)$ liter/detik.

4. Pertidaksamaan Linier

Dalam kehidupan sehari-hari, banyak kita jumpai kasus yang melibatkan pembatasan suatu hal. Contohnya, lowongan kerja mensyaratkan pelamar dengan batas usia tertentu, batas nilai cukup seorang pelajar agar dinyatakan lulus dari ujian, dan batas berat bersih suatu kendaraan yang diperbolehkan oleh dinas angkutan umum. Perhatikan masalah berikut!

Masalah-2.6

Ayah Budi lebih muda dibanding pamannya tetapi lebih tua dari ibunya. Sementara umur bibinya hanya satu tahun lebih tua dari umur ibunya tetapi satu tahun lebih muda dari umur ayahnya.
Budi berencana mengurutkan umur antara ayah, ibu, paman, dan bibinya berdasarkan umur mereka yang lebih tua.
Dapatkah kamu membantu Budi dalam mengatasi permasalahan tersebut?

Pertama sekali didefinisikan variabel-variabelnya sebagai berikut:
Umur ayah = A Umur ibu = I
Umur paman = P Umur bibi = B

Dari penjelasan permasalahan di atas, diperoleh informasi sebagai berikut.

a. Ayah lebih muda dibanding paman
   $A < P$
b. Ayah lebih tua dari ibu
   $A > I$ atau $I < A$
c. Umur bibi hanya satu tahun lebih tua dari umur ibu
   $B + 1 = I$ atau $B > I$
d. Umur bibi satu tahun lebih muda dari ayah
   $B – 1 = A$ atau $B < A$

Dengan mengamati pola di atas, yaitu $A < P$, $I < A$, $I < B$, dan $B < A$.

Urutan umur mereka mulai dari tertua ke termuda adalah $P > A > B > I$.

Sehingga kesimpulan adalah paman lebih tua dibanding ayah, ayah lebih tua dibanding bibi, dan bibi lebih tua dibanding ibu.

Diskusi

Diskusikan masalah urutan berikut dengan menggunakan metodemu sendiri!
Pak Anto, Pak Yusuf, dan Pak Doni gemar memancing. Mereka selalu memancing ikan di sungai setiap Sabtu. Suatu hari, setelah mereka selesai memancing, mereka menghitung banyak ikan yang mereka dapatkan masing-masing. Banyak ikan yang ditangkap Pak Anto ternyata lebih daripada banyak ikan yang ditangkap Pak Yusuf. Walaupun banyak ikan yang ditangkap Pak Anto dikali dua, juga masih lebih sedikit dibanding dengan tangkapan Pak Yusuf dan Pak Doni. Berdasarkan cerita di atas, dapatkah kamu menentukan urutan mereka berdasarkan banyak ikan yang mereka tangkap?

Dalam metode kasus dijelaskan variabel yang dipergunakan, hubungan antar variabel berdasarkan informasi yang ada, dan kesimpulan yang kamu ambil berdasarkan hubungan-hubungan tersebut.

Masalah-2.7

Gambar 2.10 Tentara menembak

Seorang tentara melakukan latihan menembak di sebuah daerah kosong warga sipil. Dia berencana menembak obyek yang telah ditentukan di sebuah perbukitan. Jika $x = 0$ adalah posisi diam tentara tersebut, maka pola lintasan peluru yang mengarah ke objek diperkirakan memenuhi persamaan $2y - x - 0,66 = 0$. Kecepatan angin dan hentakan senjata akan mempengaruhi pergerakan peluru sehingga kemung-kinan lintasan peluru dapat berubah menjadi $y - 0,475x - 0,35 = 0$. Pada jarak berapakah lintasan peluru akan menyimpang 0,05 m oleh pengaruh-pengaruh perubahan arah tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Lintasan peluru seharusnya $2y - x - 0,66 = 0$. Kenyataannya $y - 0,475x - 0,35 = 0$. Simpangan antara keduanya dapat dinyatakan sebagai selisih harga mutlak. Sehingga diperoleh

$|(0,5x + 0,33) - (0,475x + 0,35)| \leq 0,05$

$\Leftrightarrow \quad |0,025x - 0,02| \leq 0,05$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(0,025x - 0,02)^2} \leq 0,05$ dengan menggunakan kesetaraan $|x| = \sqrt{x^2}$

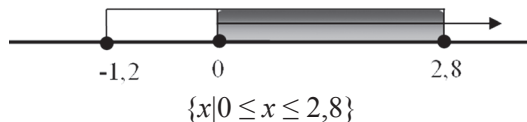
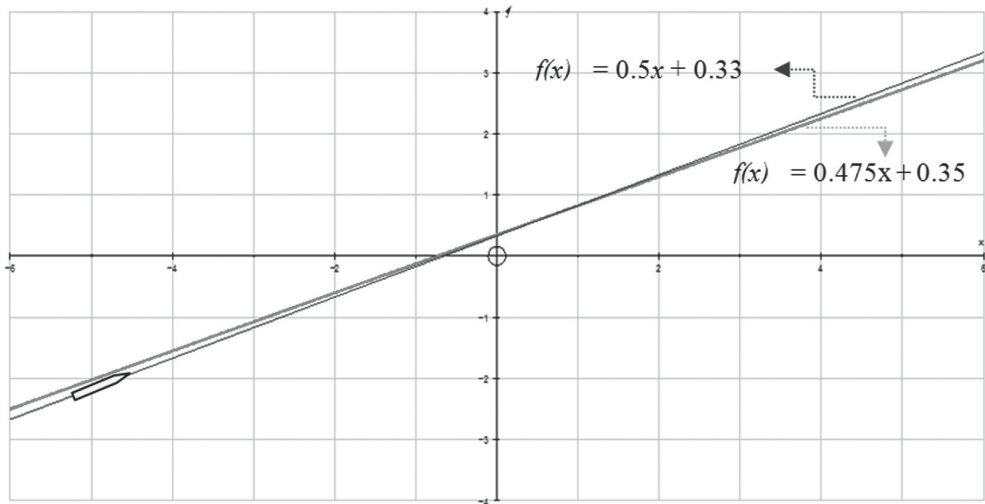
$\Leftrightarrow \quad (0,025x - 0,02)^2 \leq (0,05)^2$

$\Leftrightarrow \quad (0,025x - 0,02)^2 - (0,05)^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow \quad [0,025x + 0,03][0,025x - 0,07] \leq 0$

Nilai pembuat nol adalah $x = -1,2$ atau $x = 2,8$

Selang nilai x yang membuat pertidaksamaan bernilai negatif adalah $-1.2 \leq x \leq 2,8$, tetapi karena $x = 0$ adalah posisi diam tentara atau posisi awal peluru, maka lintasan peluru haruslah pada interval $x \geq 0$. Dengan demikian, interval $-1,2 \leq x \leq 2,8$ akan kita iriskan kembali dengan $x \geq 0$ seperti berikut.

$\{x | 0 \leq x \leq 2,8\}$

Jadi, penyimpangan lintasan peluru akibat pengaruh kecepatan angin dan hentakan senjata sebesar 0,05 m terjadi sejauh 2,8 m dari posisi awal.
Permasalah di atas dapat dinyatakan dengan grafik sebagai berikut.

Gambar 2.11 Lintasan Peluru

Dari Gambar 2,11, jelas kita lihat bahwa grafik lintasan peluru yang diprediksi mengalami penyimpangan (garis putus-putus). Penyimpangan sejauh 0,05 m akan terjadi sampai $x = 2,8$ m.

Contoh 2.4

Selesaikanlah pertidaksamaan berikut dengan metode umum $|2x + 1| \geq |x - 3|$!

Penyelesaian

Langkah 1: Ingat bahwa $|x| = \sqrt{x^2}$ sehingga:

$$|2x+1| \geq |x-3| \Leftrightarrow \sqrt{(2x+1)^2} \geq \sqrt{(x-3)^2}$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)^2 \geq (x-3)^2$$

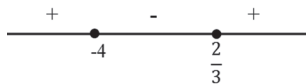
$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 \geq x^2 - 6x + 9$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 10x - 8 \geq 0 \qquad \text{(bentuk kuadrat)}$$

$$\Leftrightarrow (3x-2)(x+4) \geq 0$$

Langkah 2: Menentukan pembuat nol.

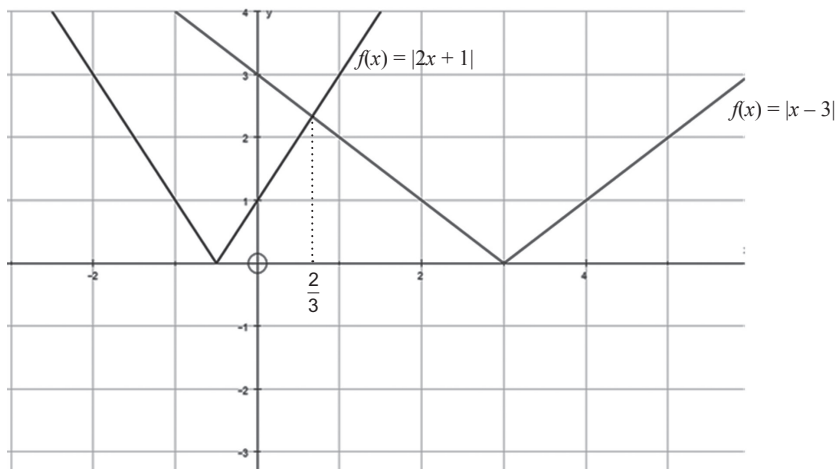
$$x = \frac{2}{3} \text{ atau } x = -4$$

Langkah 3: Letakkan pembuat nol dan tanda pada garis bilangan

Langkah 4: Menentukan interval penyelesaian.

Dalam hal ini, interval penyelesaian merupakan selang nilai x yang membuat pertidaksamaan bernilai positif, sesuai dengan tanda pertidaksamaan pada soal di atas. Dengan demikian arsiran pada interval di bawah ini adalah interval penyelesaian pertidaksamaan tersebut.

Langkah 5: Menuliskan kembali interval penyelesaian

$$HP = \left\{ x \middle| x \leq -4 \text{ atau } x \geq \frac{2}{3} \right\}$$

Permasalahan di atas dapat diselidiki dengan memperlihatkan grafik $y = |2x + 1|$ dan grafik $y = |x + 3|$, untuk setiap $x \in R$. Berdasarkan grafik pada Gambar 2.4, kita memperoleh grafik sebagai berikut.

Gambar 2.12 Grafik $f(x) = |2x + 1|$ dan $f(x) = |x + 3|$

Pertidaksamaan $|2x + 1| \geq |x - 3|$ dapat dilihat sebagai grafik fungsi $f(x) = |2x + 1|$ berada di atas grafik $f(x) = |x - 3|$. Dari Gambar 2.11 terlihat bahwa pernyataan itu benar untuk nilai x dalam himpunan $\left\{x \mid x \leq -4 \text{ atau } x \geq \frac{2}{3}, x \in R\right\}$. Coba gambar sendiri lanjutan kurvanya.

5. Aplikasi Nilai Mutlak pada Pertidaksamaan Linier

Selanjutnya kita akan mengaplikasikan konsep nilai mutlak ke pertidaksamaan linier, dengan memahami dan meneliti kasus-kasus berikut.

Masalah-2.8

Gambar 2.13 Inkubator

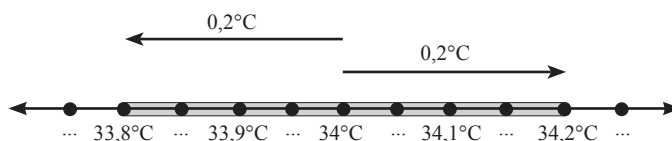
Seorang bayi lahir prematur di sebuah Rumah Sakit Ibu dan Anak dengan berat badan 2.200 gram. Untuk mengatur suhu tubuh bayi tetap stabil, maka harus diinkubator selama beberapa hari. Suhu inkubator harus dipertahankan berkisar antara 32°C hingga 35°C selama 2 hari. Ternyata jika berat badan berada pada interval BB: 2.100–2.500 gram, maka suhu inkubator yang harus dipertahankan adalah 34°C. Jika pengaruh suhu ruangan membuat suhu inkubator menyimpang sebesar 0.2°C maka hitunglah interval perubahan suhu inkubator!

Alternatif Penyelesaian

Pada kasus bayi ini, kita sudah mendapatkan data dan suhu inkubator yang harus dipertahankan selama 1–2 hari semenjak kelahiran adalah 34°C. Misalkan T adalah segala kemungkinan perubahan suhu inkubator akibat pengaruh suhu ruangan, dengan perubahan yang diharapkan sebesar 0.2°C, maka nilai mutlak suhu tersebut dapat kita modelkan, sebagai berikut:

$$|T - 34^oC| \leq 0{,}2^oC$$

Kasus ini dapat kita selesaikan melalui cara berikut.

Cara I. (Dengan mengamati sketsa)

Gambar 2.14 Interval perubahan suhu

sehingga interval kenaikan suhu inkubator adalah interval $T\,|33{,}8^oC \leq T \leq 34{,}2^oC\}$.

Cara II. (Secara Aljabar)

Dengan mengingat bahwa $|T| = \sqrt{T^2}$ maka:

$|T - 34^oC| \leq 0,2^oC \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(T - 34°C)^2} \leq 0.2°C$ (kuadratkan)

$\Leftrightarrow (T - 34^oC)^2 \leq (0,2^oC)^2$

$\Leftrightarrow (T - 34^oC)^2 - (0,2^oC)^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow [(T - 34^oC) - (0,2^oC)] [(T - 34^oC) + (0,2^oC)] \leq 0$

$\Leftrightarrow [T - 34,2^oC] [T - 33,8^oC] \leq 0$

Nilai pembuat nol adalah $T = 34,2^oC$ atau $T = 33,8^oC$

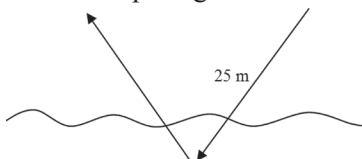
$\{T \mid 33,8^oC \leq T \leq 34,2^oC\}$

Uji Kompetensi 2.2

Selesaikan soal-soal berikut.

1. Sketsalah grafik $y = \left|\frac{x}{3} - 2\right| + 6$, untuk setiap nilai x bilangan real dengan terlebih dahulu menampilkan pasangan titik-titik yang dilalui grafik tersebut.

x	3	4	5	6	7	8	9	10
y	7	...	...	6	...	...	7	...
(x,y)	(3,7)	...	...	(6,6)	...	...	(9,7)	...

2. Seekor burung camar laut terbang pada ketinggian 17 meter melihat ikan pada jarak 25 meter sehingga ia terbang menukik ke permukaan laut dan menyelam sejauh 3 meter dan langsung bergerak kembali ke permukaan dan langsung terbang kembali seperti gambar.

Jika kita asumsikan permukaan laut sebagai sumbu x maka fungsi pergerakan burung tersebut adalah $f(x) = |x - a| + b$ dengan a, b, dan x adalah bilangan real.
Tentukanlah nilai a dan b tersebut!

3. Buktikan:
   a. $|x^2| = x^2$
   b. $|x^2 - 2x + 1| = x^2 - 2x + 1$

   Petunjuk: $|x| = \sqrt{x^2}$

4. Buktikan:
   a. $|a + b| \leq |a| + |b|$
   b. $|a - b| \leq |a| + |b|$

5. Buktikan bahwa grafik persamaan linear dua variabel adalah garis lurus!

6. Gambarkanlah semua titik (x,y) pada bidang yang memenuhi $|x + y| + |x - y| = 2$.

7. Gambarkanlah himpunan penyelesaian ketaksamaan linear berikut ini, dalam bentuk diagram garis!
   a. $4 < |x + 2| + |x - 1| < 5$
   b. $|x - 2| \leq |x + 1|$

Pilihlah jawaban yang benar.

8. Pertidaksamaan $2x - a < \frac{x-1}{2} + \frac{ax}{3}$ mempunyai penyelesaian $x > 5$. Nilai a adalah ...
   (A) 2
   (B) 3
   (C) 4
   (D) 5
   (E) 6

9. Semua nilai x yang memenuhi $0 < |x - 3| \leq 3$ adalah ...
   (A) $\{x|0 < x < 3 \text{ atau } 3 < x \leq 6, x \in R\}$
   (B) $\{x|0 \leq x < 3 \text{ atau } 3 < x \leq 6, x \in \mathrm{R}\}$
   (C) $\{x|0 \leq x \leq 3 \text{ atau } 3 < x \leq 6, x \in \mathrm{R}\}$
   (D) $\{x|0 \leq x \leq 3 \text{ atau } 3 < x < 6, x \in \mathrm{R}\}$
   (E) $\{x|0 < x < 3 \text{ atau } 3 < x < 6, x \in \mathrm{R}\}$

10. Himpunan penyelesaian dari $|3x + 2| > 5$ adalah ...
   (A) $\{x|x < -\frac{1}{3} \text{ atau } x > 0, x \in R\}$
   (B) $\{x|x < -\frac{7}{3} \text{ atau } x > 1, x \in R\}$
   (C) $\{x|x < -1 \text{ atau } x > 1, x \in \mathrm{R}\}$
   (D) $\{x|x < -\frac{1}{2} \text{ atau } x > 1, x \in \mathrm{R}\}$
   (E) $\{x|x < -\frac{1}{4} \text{ atau } x > 0, x \in \mathrm{R}\}$

Projek

Dalam kehidupan sehari-hari terdapat banyak besaran-besaran yang nilainya dinyatakan dalam persamaan linear. Misalkan saja besar tagihan telepon terhadap pemakaian.

- Dapatkan informasi tentang besaran-besaran yang nilainya dinyatakan dengan persamaan linear dan bagaimana bentuk persamaan linear tersebut.
- Demikian juga dengan nilai mutlak. Ketelitian selalu dinyatakan dengan nilai mutlak, karena ketelitian tidak memperhatikan apakah penyimpangan pada nilai sebenarnya adalah positif atau negatif. Dengan kata lain, penyimpangan sebesar –0,05 adalah sama tidak telitinya dengan penyimpangan sebesar 0,05.
- Dapatkan informasi tentang pengguanan nilai mutlak dalam kehidupan sehari-hari yang kamu jumpai.
- Buat laporan tentang hasil pencarian dan pengkajianmu serta paparkan hasilnya di depan kelas. Akan lebih menarik apabila kamu juga membandingkan beberapa alternatif pembayaran yang ditawarkan oleh penyedia jasa (misalnya: telepon, listrik) untuk menentukan alternatif mana yang paling menguntungkan sesuai dengan penggunaan.

D. PENUTUP

Setelah kita membahas materi persamaan dan pertidaksamaan linear, maka dapat diambil berbagai simpulan sebagai acuan untuk mendalami materi yang sama pada jenjang yang lebih tinggi dan mempelajari bahasan berikutnya. Beberapa simpulan disajikan sebagai berikut.

1. Nilai mutlak dari sebuah bilangan adalah positif. Hal ini sama dengan akar dari sebuah bilangan selalu positif. Misal $a \in$ R, maka $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$. Dengan demikian grafik fungsi nilai mutlak selalu berada di atas sumbu x.
2. Persamaan dan pertidaksamaan linear dapat diperoleh dari persamaan atau fungsi nilai mutlak yang diberikan. Misalnya, jika diketahui $|ax + b| = c$, untuk $a, b, c \in R$, maka menurut definisi nilai mutlak diperoleh persamaan $ax + b = c$. Demikian juga untuk pertidaksamaan linear.
3. Bentuk umum dari persamaan linear dinyatakan: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = 0$ dengan setiap koefisien dan variabelnya merupakan bilangan-bilangan real. Jika $a_2 = a_3 = ... = a_n = 0$, maka diperoleh persamaan linear satu variabel dan apabila $a_3 = a_4 = ... = a_n = 0$, maka diperoleh persamaan linear dua variabel.
4. Pertidaksamaan linear adalah suatu kalimat terbuka yang menggunakan pertidaksamaan $<$, $\leq$, $>$, dan $\geq$. Misal $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n > 0$ dengan setiap koefisien dan variabelnya merupakan bilangan-bilangan real. Jika $a_2 = a_3 = ... = a_n = 0$, maka ditemukan pertidaksamaan linear satu variabel dan apabila $a_3 = a_4 = ... = a_n = 0$, maka diperoleh pertidaksamaan linear dua variabel.
5. Himpunan penyelesaian suatu persamaan dan pertidaksamaan linear adalah suatu himpunan yang anggotanya nilai variabel yang memenuhi persamaan atau pertidaksamaan tersebut. Banyak anggota himpunan penyelesaiannya sebuah persamaaan linear dapat (1) tepat satu, (2) lebih dari satu (berhingga atau tak berhingga banyak penyelesaian), atau (3) tidak punya penyelesaian.
6. Grafik persamaan linear satu atau dua variabel adalah sebuah garis lurus yang mungkin memotong sumbu x dan sumbu y atau tidak memotong sumbu x tetapi memotong sumbu y atau hanya memotong sumbu y.

Konsep dan sifat-sifat persamaan dan pertidaksamaan linear telah kita temukan dan kita terapkan dalam penyelesaian masalah kehidupan dan penyelesaian masalah matematika. Penguasaan kamu terhadap berbagai konsep dan sifat-sifat persamaan dan pertidaksamaan linear adalah syarat perlu untuk mempelajari bahasan sistem persamaan linear dua variabel dan tiga variabel serta sistem pertidaksamaan linear dengan dua variabel. Kita akan temukan konsep dan berbagai sifat sistem persamaan

linear dua dan tiga variabel melalui penyelesaian masalah nyata yang sangat bermanfaat bagi dunia kerja dan kehidupan kita. Persamaan dan pertidaksamaan linear memiliki himpunan penyelesaian demikian juga sistem persamaan dan pertidaksamaan linear. Pada bahasan sistem persamaan linear dua dan tiga variabel, kamu pelajari berbagai metode penyelesainya untuk menentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan dan pertidaksamaan tersebut. Seluru konsep dan aturan-aturan yang kita temukan diaplikasikan dalam penyelesaian masalah yang menuntut kamu berpikir kreatif, tangguh menghadapi masalah, mengajukan ide-ide secara bebas dan terbuka, baik terhadap teman maupun terhadap guru.